矩阵在解线性方程组中的作用及应用

陈政

440881********4617

摘要：本文介绍了矩阵基础与线性方程组的关系，阐述了矩阵如何作为数学工具来简洁地表示和操作线性方程组的系数和常数项；详细分析了矩阵在解线性方程组中简化表达、高效求解、跨学科应用、数值计算以及处理特殊类型方程组的五大作用。在应用过程中，分析了利用高斯消元法、矩阵的逆和克拉默法则来求解线性方程组的方法。研究结果表明：这些矩阵方法即提高了求解线性方程组的效率和准确性，也为跨学科问题的求解提供了有力的数学工具和有益的启示。

关键词：矩阵；线性方程组；高斯消元法；克拉默法则；应用

DOI:10.69979/3041-0673.24.6.048

矩阵在解线性方程组中扮演着至关重要的角色，是数学领域不可或缺的工具。线性方程组，作为代数学中的一个核心概念，涉及一组包含未知数的线性等式，这些等式的解需要同时满足所有方程的条件。在实际应用中，线性方程组广泛应用于物理、化学以及其他等的多个领域，主要用于描述和解决各种实际问题。而矩阵，作为一种按照长方阵列排列的复数或实数集合，为线性方程组的求解提供了一种系统化、标准化的方法。因此，深入研究矩阵在解线性方程组中的作用及应用，能够使我们更好地理解和掌握线性方程组的求解方法，还能在实际问题的求解中提供有力的数学工具。

1 矩阵基础与线性方程组的关系

矩阵，看似简单却功能强大的数学工具，却与线性方程组之间存在着千丝万缕的联系。矩阵，简单来说，就是一个由数按矩形排列构成的二维数组。每一个数在矩阵中都有一个特定的位置，称为元素；而线性方程组，则是由一组线性方程组成的系统，这些方程中的变量都是一次的，且方程的个数和变量的个数可以相等，也可以不等。在学习的过程中，如果将线性方程组的系数按照一定规则排列成一个矩阵时，这个矩阵就称为系数矩阵。而常数项则可以被看作是一个向量，与系数矩阵一起，构成了增广矩阵。这种表示方法简洁明了，且大大简化了线性方程组的求解过程。

2 矩阵在解线性方程组中的作用

2.1 简化表达

矩阵的第一个重要作用就是简化线性方程组的表达。在没有矩阵之前，可能需要用很长的一串方程来表示一个线性方程组，不仅繁琐，而且容易出错。但是，当用矩阵来表示线性方程组时，所有的系数和常数项都被整齐地排列在矩阵和向量中，使得整个方程组看起来更加清晰、简洁。这种简化表达的优势和作用是显而易见的：一方面它减少了出错的可能性，因为所有的信息都被集中在一个地方，不需要在多个方程之间来回切换；另一方面，它使得更容易理解方程组的结构，从而更容易找到求解的方法。

2.2 高效求解

矩阵的另一个重要作用是提供高效求解线性方程组的方法。在学习的过程中，需要接触到许多利用矩阵求解线性方程组的算法，如高斯消元法、LU 分解法等。这些算法全都利用了矩阵的性质和运算规则，通过行变换或矩阵分解步骤，将原始方程组化简为更容易求解的形式。高斯消元法是一种非常直观且有效的算法。该方法通过将系数矩阵化为阶梯形矩阵，然后逐步回代求解变量，从而得到线性方程组的解。这种方法主要适用于一般的线性方程组，且对于变量个数多于方程个数的超定方程组，也可以通过最小二乘法得到最佳近似解。LU 分解法则是一种更高效的算法。它将系数矩阵分解为一个下三角矩阵 L 和一个上三角矩阵 U 的乘积，然后通过分别求解 L 和 U 的逆矩阵（或逆的变换），再回代求解原始方程组，这种方法在计算复杂度和数值稳定性上都比高斯消元法有着更多的优势。

2.3 跨学科应用

矩阵在解线性方程组中的作用不仅仅限于数学领域，它还广泛应用于物理、化学等多个学科中。这些学科中的许多问题都可以转化为线性方程组来求解，从而利用矩阵方法得到解决方案。

2.4 数值计算

矩阵在数值计算中也发挥着重要作用。在实际应用中，经常会遇到一些复杂的线性方程组，这些方程组的系数矩阵可能非常大、非常稠密，甚至可能是不规则的。对于这样的方程组，直接求解可能会非常困难，甚至无法实现。但是，通过矩阵的数值计算方法，可以得到这些方程组的近似解或最佳解。数值计算方法包括迭代法、直接法和混合法等的多种类型。

2.5 处理特殊类型方程组

2.5.1 齐次线性方程组

在面对一个线性方程组时，并将其成功转化为齐次线性方程组的形式后，可以进一步分析该方程组的系数矩阵 A。通过对 A 实施初等行变换，可以得到一个行阶梯形矩阵。在这个矩阵中，非零行的数量被记为 r，原线性方程组中的未知量个数为 n。基于这个行阶梯形矩阵，可以得出以下两个重要的观察结论：

（1）如果非零行的数量 r 恰好等于未知量的数量 n，即每一个未知量都受到了方程组中至少一个非零行的直接约束。在这种情况下，齐次线性方程组仅存在唯一的解，即所有未知量都为零的解，称之为零解。

（2）如果非零行的数量 r 小于未知量的数量 n，说明方程组中存在至少一个未知量没有受到非零行的直接约束，这样的未知量叫作自由未知量。在这种情况下，齐次线性方程组将拥有无穷多的解，可以为自由未知量赋予任意的值，并通过回代或其他方法求解出其他未知量的值，从而得到方程组的多个解，这些解中可能包含非零的未知量。

根据线性代数的理论，当非零行的数量小于未知量的数量时，齐次线性方程组将拥有无穷多的解。这是因为方程组中存在至少一个自由未知量，可以为这个自由未知量赋予任意的值，并通过回代或其他方法求解出其他未知量的值，从而得到方程组的多个解。

2.5.2 非齐次线性方程组

对于非齐次线性方程组，可以通过以下步骤来判断其解的情况：

构建该方程组的增广矩阵 B，该矩阵是将系数矩阵 A 与常数项列向量合并而成的，即在系数矩阵的右侧添加一列，这一列就是方程组中每个方程的常数项所形成的列向量。

（2）对增广矩阵 B 执行初等行变换，直至其呈现为行阶梯形矩阵的形式。在得到行阶梯形矩阵后，对比系数矩阵 A 的非零行行数 r1 与行阶梯形矩阵的非零行行数 r2，以及方程组中未知量的数量 n。如果 r1 与 r2 不相等，往往意味着常数项与系数矩阵在初等行变换过程中表现出了不一致性。因此，非齐次线性方程组在这种情况下是无解的；如果 r1 与 r2 相等，并且它们都等于未知量的数量 n，那么这表示增广矩阵 B 与系数矩阵 A 的秩是相等的，并且这个秩恰好等于未知量的数量。这通常表明方程组中的每一个未知量都能被唯一确定，因此非齐次线性方程组在这种情况下有唯一解。

如果 r1 与 r2 相等，但它们都小于未知量的数量 n，表示增广矩阵 B 与系数矩阵 A 的秩是相等的，但这个秩小于未知量的数量，表明方程组中存在至少一个自由未知量，因此非齐次线性方程组在这种情况下有无穷多解。这些解可以通过为自由未知量赋予任意值，并利用回代或其他数学方法求解出其他未知量的值来得到。

3 矩阵在解线性方程组的应用

3.1 利用高斯消元法解线性方程组

高斯消元法是一种广泛应用于求解线性方程组的数学方法，其核心在于通过矩阵的初等行变换来简化方程组，进而求解未知数。该方法的基本思想是通过一系列精心设计的行变换操作，逐步将系数矩阵转化为一个上三角矩阵或更为简洁的简化阶梯型矩阵。在这一过程中，利用初等行变换，如行的交换、行的倍加以及行的倍加替换等，来逐步消除系数矩阵中的非零元素，直至将其转化为一个易于处理的三角形式。当系数矩阵被转化为上三角矩阵或简化阶梯型矩阵后，可以直接从矩阵中读出未知数的解，或者通过简单的回代过程来求解剩余的未知数。具体步骤如下：

（1）写出增广矩阵。将线性方程组的系数和常数项合并为一个增广矩阵(A|b)，其中 A 是系数矩阵，b 是常数向量。

比如，对于线性方程组

$$\{ 2x + y - z = 1 - 4x - 2y + 2z = -2 - 2x - y + z = 0$$

其增广矩阵为 $2 - 4 - 2 \quad 1 - 2 - 1 - 121 \quad 1 - 20$

（2）进行初等行变换：通过换行、倍乘、倍加等初等行变换，将增广矩阵转化为简化阶梯型矩阵。通过倍加和倍乘，将第一列的元素除第一行外全部变为 0，使第一行成为主元行；对第二行进行类似操作，使其成为第二个主元行，以此类推；通过换行和倍加，将矩阵转化为简化阶梯型矩阵。

经过一系列变换后，上述增广矩阵可能变为：

$$200 \quad 1 - 10 \quad -110 \quad 1 - 10$$

读取解。从简化阶梯型矩阵中直接读出未知数的解，

是高斯消元法求解线性方程组的一个重要步骤，也是其高效性和直观性的体现。在将系数矩阵通过初等行变换转化为简化阶梯型矩阵后，可以清晰地看到每个未知数所对应的系数和常数项。在简化阶梯型矩阵中，每个未知数都对应着一个非零系数，并且这个非零系数是该未知数所在列的唯一非零元素，从而可以直接从这个非零系数和对应的常数项中，通过简单的除法运算得出该未知数的解。

在上述例子中，由于第三行全为 0，且常数项也为 0，说明方程组有一个自由变量（可以选择 z 为自由变量）。因此，从第一行和第二行可以解出：

$$y = z - 1, x = 2z + 1$$

因此，方程组的解集为 ⎩ ⎨ ⎧ 2z+1　z−1z ∣ z∈R ⎭ ⎬ ⎫

高斯消元法即适用于求解一般的线性方程组，还可以用于判断方程组是否有解、有无穷多解或唯一解。当增广矩阵的秩不等于系数矩阵的秩时，方程组无解；当增广矩阵的秩小于未知数的个数时，方程组有无穷多解；否则，方程组有唯一解。

3.2 利用矩阵的逆解线性方程组

当线性方程组的系数矩阵 A 可逆，而 A 的行列式不为 0 时，便可以拥有了一种直接且高效的求解方程组的方法。在这种情况下，系数矩阵 A 的逆矩阵是存在的，且唯一确定。利用这一性质，可以将线性方程组 $Ax = b$（其中 x 是未知数向量，b 是常数向量）转化为 $x = A^{-1}b$ 的形式来求解。具体步骤如下：

（1）验证可逆性。计算系数矩阵 A 的行列式$|A|$。如果$|A| \neq 0$，则 A 可逆。

（2）计算逆矩阵。利用伴随矩阵或高斯-约旦消元法等方法计算 A 的逆矩阵A^{-1}。

（3）求解方程组。将常数向量 b 与 A 的逆矩阵相乘，得到未知数向量 x 的解，即 $x = A^{-1}b$。

比如，对于线性方程组{$2x + y = 34x + 2y = 6$

其系数矩阵为：$A = (24\ 12)$

计算得$|A| = 0$，说明 A 不可逆。因此，不能通过这种方法求解。但在此假设 A 可逆以展示过程。若 A 可逆，其逆矩阵A^{-1}为

$$A - 1 = |A|1 \cdot adj(A) = 4 - 41 \cdot (2 - 4 - 12)$$

但由于$|A| = 0$，这个假设不成立。若 A 可逆，则解为

$$x = A - 1b = 41(2 - 4 \ - 12)(36) = (03)$$(仅作为示例，实际应判断$|A| = 0$)

3.3 利用克拉默法则解线性方程组

克拉默法则是一种强大且独特的求解线性方程组的方法，其核心在于利用行列式的计算来得出方程组的解。该方法有一个基本的前提条件，那就是系数矩阵的行列式必须不为零。由此可以得出：系数矩阵必须是可逆的。当系数矩阵满足这一条件时，就可以通过克拉默法则来求解线性方程组了。具体步骤如下：

（1）计算行列式。计算系数矩阵 A 的行列式$|A|$。如果$|A| = 0$，则克拉默法则不适用。

（2）计算替换行列式。对于每个未知数 xi，构造一个新的矩阵 Ai，它是将 A 的第 i 列替换为常数向量 b 后得到的矩阵，并计算 Ai 的行列式$|Ai|$。

（3）求解未知数。利用克拉默法则公式，计算每个未知数 xi 的值，即 $xi = |Ai|/|A|$。

克拉默法则虽然直观且易于理解，但在实际应用中，由于需要计算多个行列式，其计算量通常较大，因此更适用于未知数较少的情况。

4 结语

综上所述，矩阵在解线性方程组中发挥着不可或缺的作用。通过简化表达、高效求解、跨学科应用、数值计算以及处理特殊类型方程组等多方面的优势，矩阵方法为线性方程组的求解提供了有力的支持，使得矩阵成为解决线性问题不可或缺的一种重要的工具。

参考文献

[1]吴英柱.矩阵的初等变换在线性代数中的若干应用与探讨[J].广东石油化工学院学报,2017(1):51-52.
[2]郑庆云,宋一杰,杨晓叶.利用矩阵初等变换求线性方程组的解[J].阴山学刊（自然科学版）,2017(1):22-23.
[3]付美鑫.利用行列式、矩阵求解线性方程组[J].黑龙江科学,2017(3):33-36.
[4]林清.矩阵在解线性方程组中的应用[J].科技展望,2015(11):32-33.