

# 数学核心素养下的高中数学教材分析——以人教 A 版“函数 $y = A \sin(\omega x + \phi)$ ”为例

苏伟

聊城大学, 山东聊城, 252000;

**摘要:** 研究内容选取自中国人民教育出版社于 2019 年出版的《普通高中教科书必修 1(A 版)》中“三角函数”这一章中的“函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$ ”这一节. 主要分析了这一部分教材中所涉及到的重点、教师主要的教学思路、教师运用的教学方法、学生可能会遇到的难点、学生在教师的引导下经历的一系列学习活动、学生要达到的学习目标以及学完后学生实际达到的目标. 另外, 在本节内容与教学过程中涉及到的数学核心素养主要有数学抽象、数学建模、直观想象和逻辑推理素养.

**关键词:** 核心素养; 教材分析; 三角函数; 函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$

**DOI:** 10.69979/3041-0673.25.01.030

三角函数是高中数学中较为重要的一部分内容, 是最具有代表性的一类周期函数, 它与向量、复数、解析几何都有一定的联系. 三角函数这一部分非常容易与其他的学科进行结合, 由此我们可以看出, 三角函数几乎可以说是全部高科技事物的重要基础.<sup>[1]</sup> 故选本节课内容进行教材分析. 本文主要依据是吴立宝教授的一篇文章: 教材分析的四条基本逻辑线——以人教版“单调性与最大(小)值”为例<sup>[2]</sup>对本节教材所含的内容进行分析.

## 1 知识逻辑

### 1.1 知识体系

从宏观角度上看, 本节内容中对函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  的研究是在前面的学习中介绍完“三角函数的图象与性质”的基础上展开的, 并且本节中大部分内容是对函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  的图象与性质进行研究, 因此本节是对前面所学内容“三角函数的图象与性质”这一节的延续和拓展. 相较于学习过的三个基本函数, 即正弦函数  $y = \sin x$ 、余弦函数  $y = \cos x$  以及正切函数  $y = \tan x$ , 这一节的内容更像是对一个复合函数的研究, 因为正弦函数、余弦函数还有正切函数都是确定的函数, 对其图象和性质的研究就相对简单, 只需列表、描点、连线便可得出其函数图象, 对函数图象进一步分析就会得到其相应的性质. 但是这一节的研究对象——函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$ , 并不是确定的函数, 而是含有三个参数的函数. 由上述分析我们可以得到, 本节是对“三角函数的图象与性质”的延续扩展; 本节

的后半部分运用函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  解决较为简单的生活实际问题同时也为接下来将要学习的“三角函数的应用”这一节的学习打下了一定的基础. 本节内容主要涉及到的思想方法有数形结合、数学建模以及化归思想, 并且体现了核心素养中的数学抽象、数学建模、直观想象以及逻辑推理, 具有较高的育人价值.

从微观角度上看, “函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$ ”这一节, 在知识层面上主要介绍了由实际问题——筒车得到的三角函数模型  $H = r \sin(\omega x + \phi) + h$ , 由此建立了一个形如  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  的函数, 由于函数中有三个参数, 故接下来分别研究这三个参数对函数的影响, 最后再将三个参数的影响合并. 在研究  $\omega$  对函数的影响时, 得到了函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  的周期性; 在研究  $A$  对函数的影响时, 得到了函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  的最值. 然后研究了函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  的实际应用.

### 1.2 教材重点

本节课是由一个实际问题引出一个

函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  之后, 研究这个函数中的三个参数  $\phi$ 、 $\omega$ 、 $A$  分别对该函数的影响, 在研究了这三个参数对函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  的影响之后得到如何由学习过的  $y = \sin x$  的图象得到  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  的图象. 因此本节课的重点是: 数学建模得出函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$ ; 参数  $\phi$ 、 $\omega$ 、 $A$  对函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  图象的影响; 从正弦曲线得到函数  $y = A \sin(\omega x + \phi)$  图象.

## 2 教学逻辑

### 2.1 教学思路

首先可以以一个单位圆上的动点的运动过程中这个动点的纵坐标随着时间的关系和所转过的角度与时间的关系引入课题,再利用这个圆周运动模型思考是否能够推广到一般的匀速圆周运动中.建立三角函数模型与概念最理想的载体是单位圆,并且匀速圆周运动是生活或学习中最典型的周期现象.<sup>[3]</sup>由此可以让学生感受到研究一般的匀速圆周运动这一类数学模型的必要性,从而让学生能够明确本节课的研究目的,从而使学生对数学进行学习的兴趣.

然后利用教材中筒车的实际情境,得出水筒距离水面的相对高度与时间的关系式  $H=r\sin(\omega x+\varphi)+h$ ,再将这个关系式一般化,得到函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ .在这个过程中要让学生通过参数的实际意义感受到关系式  $H=r\sin(\omega x+\varphi)+h$  中各个参数  $r, \omega, \varphi, h$  对函数的影响,从而为后面将要研究函数

$y=A\sin(\omega x+\varphi)$  中各个参数  $\omega, \varphi, A$  对该函数的影响做好铺垫.这一部分的目的是以筒车运动规律的刻画为背景,利用三角函数建立数学模型,由此便明确了本节课的研究对象.

明确了研究对象,接下来自然就要开始研究其性质.那如何研究,从哪方面入手,如何让学生真正理解为何要这样研究这都是我们要思考的.

可以先让学生回顾当时是如何研究二次函数

$y=ax^2+bx+c$  的,学生经历过从  $y=ax^2$  到  $y=a(x-h)^2$  再到  $y=a(x-h)^2+k$  最后再到  $y=ax^2+bx+c$  的研究过程,经历过根据上述研究过程得到的如何从函数  $y=ax^2$  图象经过平移变换得到二次函数  $y=ax^2+bx+c$  图象的过程.让学生发现本节研究内容与二次函数的相同之处,并由此得到可以类比二次函数的研究过程,分别研究三个参数对函数的影响,然后再将它们合成,同时又可以利用  $y=\sin x$  的图象与性质,从图象平移到图象伸缩,由易到难、由单一到综合的进行研究.

明晰了研究思路,接下来就要开始研究本节课的研究对象.先要研究参数对函数的影响,在此阶段的研究过程中需要用到信息技术进行数学实验,方便学生更加直观的感受参数对函数的影响,在这个研究过程中不仅要得到三个参数  $\omega, \varphi, A$  对  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  图象

的影响,也要得出如何从正弦曲线得到  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的图象.

本节的教学思路和教学结构是由实际问题引入,类比二次函数的研究过程,从正弦曲线出发经过变换得到  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的图象,并在这个过程中得到  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的相关性质.

### 2.2 教学方法

在“函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ”的教学中,教师主要是启发学生从现实生活中的圆周运动想到一般的匀速圆周运动,启发学生从筒车这个实际生活的例子中建立数学模型,得到一般式  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ .然后再引导学生类比二次函数的研究过程得出本节课的研究思路,并在研究过程中借助信息技术给学生们演示各个参数对函数的影响以及如何通过正弦函数图象平移伸缩得到  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的图象,使学生们更加直观的感受教材内容.然后引导同学们在学完三个参数对函数的影响之后归纳出如何从正弦函数图象得到  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的图象,这个过程中需要学生以小组为单位进行讨论.因此整个过程中,用到的教学方法有讲授法、讨论法、启发法、演示法和练习法.

另外可以运用数学软件Geogebra进行演示.比如在引入课题的过程中,可以利用此软件展示单位圆上动点的运动过程,激发学生们学习数学的兴趣;在研究三个参数  $\varphi, \omega, A$  对函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的影响的过程中,可以展示各个参数单独对函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的影响,再演示三个参数叠加时图象的变化,会使学生印象更加深刻.在本节的教学过程借助Geogebra可以实现函数图象变化过程的可视化、动态化,使参数的变化可操作化,使学生的学习体验形象化,还可以给学生提供充足的观察、归纳总结的机会,从而增强学习活动的探索性.<sup>[4]</sup>

## 3 学习逻辑

教材为学生的学习提供了基本内容以及学生学习完新知识之后的习题练习,因此,教材是学习的重要资源.<sup>[5]</sup>主要从学生在学习本节内容时会遇到的难点问题以及学生在教师的引导下学习本节内容的过程中所要经历的一系列的学习活动两个方面进行分析教材.

### 3.1 学习难点

学生未系统学习过数学建模,所以从一个生活实际

问题中抽象出一个三角函数的模型是非常困难的,因此从简车问题中建模得到函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  是学生的一个难点;从正弦曲线到  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的图象的坐标变换也是学生学习的难点问题,由于这里增加了三个参数,而且还要研究这些参数对函数的影响,因此学生较难理解这部分的内容;另外,当三个参数变化的顺序不同时,对函数的影响也有区别,学生一般很难理解,因此学生对从  $y=\sin x$  变换到  $y=\sin(\omega x+\varphi)$  的不同顺序引起的不同变换方式的理解也是本节课学习的一大难点.

### 3.2 学习活动

在“函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ”这一节中,先要从实际问题中建立数学模型,然后从二次函数的研究过程中得到启发从而得出本节课的研究思路并按照此思路研究本节课的研究对象,在研究过程中得到如何从正弦曲线变换到  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的图象,并且还能够区分先变换  $\omega$  与先变换  $\varphi$  对函数  $y=\sin(\omega x+\varphi)$  图象的影响有何不同之处.根据本节教材内容中的重点知识以及学生在学习中遇到的学习难点,学生将通过六个“探究”来完成本节内容中难点知识和重点知识的学习,通过三个“题组”来练习并且强化本节课中学习过的内容与知识.

探究 1 在题目中的各个量与盛水筒运动相关的有哪些?它们各个量之间都存在什么样的关系?

探究 2 显然,参数  $\varphi$ 、 $\omega$ 、 $A$  确定了  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ . 因此,只要了解这些参数的意义,并且知道三个参数  $\varphi$ 、 $\omega$ 、 $A$  对  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  图象的影响,就能够把握这个函数的基本性质.从表面看,  $y=\sin x$  是  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  在  $\varphi=0$ 、 $\omega=1$ 、 $A=1$  时的特殊情形.

探究 3 能否借助前面学习过的  $y=\sin x$  的图象与性质来研究  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的图象与性质呢?

探究 4 函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  中含有三个参数,应该怎样通过这三个参数来研究函数的图像与性质呢?以前研究过涉及多个参数的函数吗?由此能得到什么启发?

探究 5 前面对参数  $\varphi$ 、 $\omega$ 、 $A$  对  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  图象的影响进行了研究,下面进行“合成”.能总结怎样从正弦曲线变换到  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  图象吗?

探究 6 从  $y=\sin x$  的图象出发,除了按照上述顺序,还可以按照什么顺序进行图象的变换从而得到函数  $y=A$

$\sin(\omega x+\varphi)$  的图象呢?如果按照  $y=\sin x \rightarrow y=\sin(\omega x) \rightarrow y=\sin(\omega x+\varphi) \rightarrow y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的顺序进行变换,能说出具体的变换过程么?

题组 1(教材练习 1):练习 1 是五点法画正弦函数图象的延续和拓展,可以用五点法画出已知  $\varphi$ 、 $\omega$ 、 $A$  的数值的函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  图象的简图.

题组 2(教材练习 2):练习 2 的三个小题是对函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  中的三个参数分别对函数的影响.

题组 3(教材练习 3, 4):练习 3 和练习 4 是具体的函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  与正弦函数图象的关系.

### 4 认知逻辑

在分析教材的过程中同时分析课程标准中对本节课的目标要求以及预设一下本节课课程结束之后的目标达成情况可以为教学的顺利实施和顺利进行提供良好的参照.<sup>[2]</sup>主要从学生所要达到的学习目标以及学完后学生实际达到的目标也就是学生在学习过程中所能感受到的数学核心素养两个方面进行分析.

#### 4.1 目标定位

在普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)中,这一节的目标为:“结合具体实例,了解  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的实际意义;能借助图象理解参数  $\varphi$ 、 $\omega$ 、 $A$  的意义,了解参数的变化对函数图象的影响”.<sup>[6]</sup>在“函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ”这一节中,由于该节教材的知识体系和教材内容以“建模—探究—应用”的线索,故可得知学生的认知水平目标:

(1) 结合具体实例,了解  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的实际意义:能在现实背景(简车)中,分析出匀速圆周运动涉及到的各个量,利用匀速圆周运动的变化规律得出这些量之间的相互关系,进而抽象出函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ .

(2) 借助图象理解参数  $\varphi$ 、 $\omega$ 、 $A$  的意义,了解参数对函数图象的影响:能借助信息技术,从正弦函数图象出发,经过坐标变换得到  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的图象;能准确解释  $\varphi$ 、 $\omega$ 、 $A$  对  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  图象的影响.

(3) 经历从现实背景中抽象出函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的过程,感悟数学建模的核心素养;经历类比二次函数研究思路研究三个参数对函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  影响的过程,学会如何研究含有多个参数的函数并体会到类比的作用.

## 4.2 目标达成

教材在起始以简车的运动为背景,创设情境提出问题,引导学生应用三角函数建立数学模型,这个过程渗透对数学建模和数学抽象等核心素养的培育;学生对于研究函数中的三个参数对于函数的影响以及如何从正弦函数图象得到  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  图象会遇到困难.为了突破这些难点,教材提出了“先分后合”的研究思路,在研究过程中从  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  出发,采用特殊到一般的方式对参数赋值,得出参数对  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  图象的影响.同时也通过信息技术演示,得到了如何从正弦函数图象经过坐标变换得到函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$  的图象,渗透了直观想象和逻辑推理的核心素养培育过程.

### 参考文献

- [1] 齐民友. 三角函数 向量 复数[J]. 数学通报, 2007, 46(10): 1-7.
  - [2] 潘超, 吴立宝. 教材分析的四条基本逻辑线——以人教版“单调性与最大(小)值”为例[J]. 中小学教师培训, 2019(03): 51-56.
  - [3] 章建跃. 用几何直观和代数运算的方法研究三角函数[J]. 数学通报, 2020, 59(11): 4-13+57.
  - [4] 张长贵. 基于 TPACK 理论的“函数  $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ”的教学与思考[J]. 数学通报, 2022, 61(04): 31-36.
  - [5] 李善良. 论中小学数学教材编写的基本原则[J]. 数学教育学报, 2007(1): 70-73.
  - [6] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 22.
- 作者简介: 苏伟(1999-), 女, 汉族, 山东临沂人, 硕士研究生在读, 聊城大学, 学科教学(数学)。